Probabilités sur un univers fini

Evènements et langage ensembliste

Exercice 1 [04003] [correction]
Soient A, B, C trois évènements d'un espace probabilisable. Exprimer les évènements suivants :
a) Aucun des évènements A, B ou C n'est réalisé.
b) Un seul des trois évènements A, B ou C est réalisé.
c) Au moins deux des trois évènements A, B ou C sont réalisés.
d) Pas plus de deux des trois évènements A, B ou C sont réalisés.

Exercice 2 [04004] [correction]
Soient A, B, C trois évènements.
a) Vérifier que $(A \cup B) \cap C$ entraîne $A \cup (B \cap C)$.
b) A quelle condition sur A et C les deux évènements précédents sont-ils égaux ?

Construction d'une probabilité

Exercice 3 [03821] [correction]
Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{k\}$ soit proportionnelle à k.

Exercice 4 [03822] [correction]
Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{1, 2, \dots, k\}$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 5 [03823] [correction]
A quelle(s) condition(s) sur $x, y \in \mathbb{R}$ existe-t-il une probabilité sur $\Omega = \{a, b, c\}$ vérifiant
$$P(\{a, b\}) = x \text{ et } P(\{b, c\}) = y\,?$$

Exercice 6 [03824] [correction]
Soient A, B deux parties d'un ensemble Ω fini vérifiant
$$A \cap B \neq \emptyset,\ A \cap \bar{B} \neq \emptyset,\ \bar{A} \cap B \neq \emptyset \text{ et } \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$$
A quelle condition sur $(a, b, c, d) \in \,]0, 1[^4$ existe-t-il une probabilité P sur Ω vérifiant
$$P(A \mid B) = a,\ P(A \mid \bar{B}) = b,\ P(B \mid A) = c \text{ et } P(B \mid \bar{A}) = d\,?$$

Exercice 7 [03829] [correction]
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.
Montrer
$$\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leqslant P(A \cap B) \leqslant \min\{P(A), P(B)\}$$

Probabité d'un évènement

Exercice 8 [03957] [correction]
On dispose r boules à l'intérieur de n urnes (avec $r \leqslant n$), chaque urne pouvant contenir plusieurs boules.
Les répartitions possibles sont équiprobables.
a) Déterminer la probabilité de l'évènement :
$$A : \text{« chaque urne contient au plus une boule »}$$
b) Déterminer la probabilité de l'évènement :
$$B : \text{« il existe une urne contenant au moins deux boules »}$$

Exercice 9 [03958] [correction]
a) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un « six » ?
b) Même question avec deux dés pour obtenir un « double-six »

Probabilités conditionnelles

Exercice 10 [03361] [correction]
Soient A et B deux évènements avec $P(A) > 0$. Comparer les probabilités conditionnelles
$$P(A \cap B \mid A \cup B) \text{ et } P(A \cap B \mid A)$$

Exercice 11 [03826] [correction]
On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor à été placé dans l'un de ses coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 12 [03828] [correction]
On se donne $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne de numéro k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire des boules avec remise.
a) Quelle est la probabilité que $(n+1)$-ième boule tirées soit blanche sachant que les n précédentes l'étaient toutes ?
b) Que de vient cette probabilité lorsque $N \to +\infty$?

Exercice 13 [03831] [correction]
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.
On suppose $0 < P(B) < 1$. Etablir

$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid \bar{B})P(\bar{B})$$

Exercice 14 [03841] [correction]
Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires.
On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.
a) Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage ?
b) Sachant qu'une boule noire figure dans le tirage. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

Exercice 15 [03954] [correction]
Une famille possède deux enfants.
a) Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?
b)Quelle est cette probabilité sachant que l'aîné est un garçon ?
c) On sait que l'un des deux enfants est un garçon, quelle est la probabilité que le deuxième le soit aussi ?
d) On sait que l'un des deux enfants est un garçon est né un 29 février, quelle est la probabilité que le deuxième soit un garçon ?

Exercice 16 [03955] [correction]
Cinq cartes d'un jeu de cinquante deux cartes sont servies à un joueur de Poker.
a) Quelle est la probabilité que celle-ci comporte exactement une paire d'As ?
b) Même question sachant que le jeu distribué comporte au moins un As ?

Exercice 17 [04012] [correction]
Soient A, B, C trois évènements avec $P(B \cap C) > 0$. Vérifier

$$P(A \mid B \cap C)P(B \mid C) = P(A \cap B \mid C)$$

Formule des probabilités totales

Exercice 18 [03842] [correction]
Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires.
On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.
Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 19 [02417] [correction]
Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On tire de celle-ci une boule, on note sa couleur et on la remet accompagnée de d boules de la même couleur. On répète l'expérience à l'envi.
Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche lors du n-ième tirage.

Exercice 20 [03827] [correction]
Une succession d'individus $A_1, \dots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui »ou « non ».
Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.
Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçu par A_n soit identique à celle émise par A_1.
On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Evènements indépendants

Exercice 21 [03948] [correction]
On lance à dé à six faces parfaitement équilibré. Justifier l'indépendance des

évènements

A : « on obtient le tirage 2, 4 ou 6 »et B : « on obtient le tirage 3 ou 6 »

Exercice 22 [03951] [correction]
Soient A et B deux évènements indépendants. Les évènements A et $\bar{B}$ sont-ils aussi indépendants ?

Exercice 23 [03953] [correction]
Montrer qu'un évènement A est indépendant de tout autre évènement si, et seulement si, $P(A) = 0$ ou 1.

Exercice 24 [03830] [correction]
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.
On suppose $A \cap B = \emptyset$. A quelle condition les événements A et B sont-ils alors indépendants ?

Exercice 25 [03949] [correction]
Soient A, B, C trois évènements tels que A et B d'une part, A et C d'autre part, soient indépendants. Les événements A et $B \cup C$ sont-ils indépendants ? Même question avec A et $B \cap C$.

Exercice 26 [03950] [correction]
Soient A, B, C trois évènements tels que A et $B \cup C$ d'une part, A et $B \cap C$ d'autre part, soient indépendants. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 27 [03952] [correction]
Soient A, B, C trois évènements.
On suppose A indépendant de $B \cap C$, B indépendant de $A \cap C$ et C indépendant de $A \cap B$.
On suppose en outre A indépendant de $B \cup C$ et $P(A), P(B), P(C) > 0$.
Etablir que les évènements A, B, C sont mutuellement indépendants.

Exercice 28 [03819] [correction]
Soit n un entier naturel supérieur à 2. On définit une probabilité uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Pour un entier p divisant n, on introduit l'événement

$$A_p = \{1 \leqslant k \leqslant n / p \text{ divise } k\}$$

a) Calculer $P(A_p)$
b) Soient p et q deux diviseurs de n. On suppose que p et q sont premiers entre eux. Montrer que les événements A_p et A_q sont indépendants. Plus généralement montrer que si $p_1, \ldots, p_r$ sont des diviseurs deux à deux premiers entre eux alors, les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont indépendants.
c) On note

$$B = \{1 \leqslant k \leqslant n / k \text{ et } n \text{ sont premiers entre eux}\}$$

Montrer

$$p(B) = \prod_{\substack{p \text{ diviseur} \\ \text{premier de } n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Exercice 29 [04033] [correction]
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des évènements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est inférieure à

$$\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right)$$

Formule de Bayes

Exercice 30 [03820] [correction]
Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif.
Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

Exercice 31 [03962] [correction]
Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second donne un « six »une fois sur deux (les autres faces étant supposées équilibrées).
On tire au hasard un dé la pochette et on le lance.
a) On obtient un « six ». Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré ?
b) Au contraire, on a obtenu un « cinq ». Même question.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$.
b) $\left(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\right)\cup\left(\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\right)\cup\left(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\right)$.
c) $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)$.
d) $\overline{A\cap B\cap C}$.

Exercice 2 : [énoncé]
a) En développant

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)\subset A\cup(B\cap C)$$

b) $A\cap C=A$ i.e. $A\subset C$ est une condition évidemment suffisante. Elle est aussi nécessaire car si

$$(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$$

alors

$$A\subset A\cup(B\cap C)\neq(A\cup B)\cap C\subset C$$

Exercice 3 : [énoncé]
Par hypothèse, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $P\left(\{k\}\right)=\alpha k$. Or par additivité

$$\sum_{k=1}^{n}P\left(\{k\}\right)=P(\Omega)=1$$

donc

$$\alpha=\frac{2}{n(n+1)}$$

Exercice 4 : [énoncé]
Si P est une probabilité solution alors, par hypothèse, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que

$$P\left(\{1,2,\dots,k\}\right)=\alpha k^2$$

On a alors

$$P\left(\{k\}\right)=P\left(\{1,\dots,k\}\right)-P\left(\{1,\dots,k-1\}\right)=\alpha(2k-1)$$

Puisque par additivité

$$\sum_{k=1}^{n}P\left(\{k\}\right)=P(\Omega)=1$$

on obtient

$$\alpha=1/n^2$$

Inversement, la probabilité définie par

$$P\left(\{k\}\right)=\frac{2k-1}{n^2}$$

est bien solution.

Exercice 5 : [énoncé]
Une probabilité solution P sera entièrement déterminée par les valeurs de $p=P\left(\{a\}\right)$, $q=P\left(\{b\}\right)$ et $r=P\left(\{c\}\right)$ sous les conditions

$$p,q,r\geqslant 0 \text{ et } p+q+r=1$$

Nous aurons $P\left(\{a,b\}\right)=x$ et $P\left(\{b,c\}\right)=y$ si

$$p+q=x \text{ et } q+r=y$$

Le système

$$\begin{cases}p+q=x\\ q+r=y\\ p+q+r=1\end{cases}$$

a pour solution

$$p=1-y,\ q=x+y-1 \text{ et } r=1-x$$

Cette solution vérifie $p,q,r\geqslant 0$ si, et seulement si,

$$x\leqslant 1,\ y\leqslant 1 \text{ et } x+y\geqslant 1$$

ce qui fournit les conditions nécessaires et suffisantes que doivent respecter x et y.

Exercice 6 : [énoncé]
Soit P une probabilité solution. Posons

$$x=P(A\cap B),\ y=P(A\cap\bar{B}),\ z=P(\bar{A}\cap B) \text{ et } t=P(\bar{A}\cap\bar{B})$$

On a $x,y,z,t\geqslant 0$ et par additivité

$$x+y+z+t=P(A)+P(\bar{A})=1$$

Inversement, si x, y, z, t sont quatre réels positifs de somme égale à 1, on peut déterminer une probabilité P sur Ω vérifiant les conditions ci-dessus : il suffit d'introduire un élément de chacun des ensembles disjoints $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$, de poser la probabilité de l'événement élémentaire associé égale à x, y, z et t respectivement, puis les probabilités des autres événements élémentaires égaux à 0.
Le problème revient alors à déterminer sous quelle condition, il existe $x, y, z, t \geqslant 0$ de somme égale à 1 tels que

$$P(A \mid B) = a,\ P(A \mid \bar{B}) = b,\ P(B \mid A) = c \text{ et } P(B \mid \bar{A}) = d$$

Par additivité

$$P(A) = x + y \text{ et } P(B) = x + z$$

On a alors $P(A \mid B) = a$ si, et seulement si, $x = a(x+z)$.
De même, les autres conditions fournissent les équations

$$y = b(1-(x+z)),\ x = c(x+y) \text{ et } z = d(1-(x+y))$$

ce qui nous conduit à un système linéaire de quatre équations et trois inconnues

$$\begin{cases} (1-a)x - az = 0 \\ bx + y + bz = b \\ (1-c)x - cy = 0 \\ dx + dy + z = d \end{cases}$$

Les trois premières équations conduisent à la solution

$$x = \frac{abc}{a(1-c)+bc},\ y = \frac{ab(1-c)}{a(1-c)+bc} \text{ et } z = \frac{(1-a)bc}{a(1-c)+bc}$$

avec le dénominateur commun non nul car somme de quantités strictement positives.
La quatrième équation du système est alors vérifiée si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d)$$

La solution (x, y, z) alors obtenue vérifie $x, y, z \geqslant 0$ et $x + y + z \leqslant 1$ de sorte qu'on peut encore déterminer $t \geqslant 0$ tel que $x + y + z + t = 1$.
Finalement, il existe une probabilité telle que voulue si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d)$$

ce qui, en divisant par $abcd$, peut encore s'énoncer

$$\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right) = \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{d}\right)$$

Exercice 7 : [énoncé]
On a $A \cap B \subset A$ donc $P(A \cap B) \leqslant P(A)$ et de même $P(A \cap B) \leqslant P(B)$ donc

$$P(A \cap B) \leqslant \min\{P(A), P(B)\}$$

Bien évidemment $P(A \cap B) \geqslant 0$. De plus $P(A \cup B) \leqslant 1$ or

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

donc

$$P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$$

puis

$$\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leqslant P(A \cap B)$$

Exercice 8 : [énoncé]
En discernant les boules et les urnes, chaque tirage se comprend comme une application φ de $\{1, \ldots, r\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$ associant à la boule d'indice i l'urne de numéro $\varphi(i)$ qui la contient.
Il y a n^r répartitions possible.
a) La probabilité cherchée correspond à celle de choisir une fonction φ injective soit

$$P(A) = \frac{n \times (n-1) \times \ldots (n-r+1)}{n^r}$$

b) La probabilité cherchée est complémentaire de la précédente

$$P(B) = 1 - P(A)$$

Exercice 9 : [énoncé]
a) La probabilité de ne pas obtenir de 6 lors de k lancers est $(5/6)^k$. Il s'agit donc ici de trouver le plus petit k pour lequel $(5/6)^k \leqslant 1/2$. On obtient $k = 4$.
b) On veut $(35/36)^k < 1/2$ et on obtient $k = 25$.

Exercice 10 : [énoncé]
Puisque $A \subset A \cup B$, on a $P(A \cup B) \geqslant P(A)$ puis

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} \leqslant \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

i.e.

$$P(A \cap B \mid A \cup B) \leqslant P(A \cap B \mid A)$$

Exercice 11 : [énoncé]
Considérons l'événement A : un trésor est placé dans l'un des coffres. Par hypothèse

$$P(A)=p$$

Considérons l'événement A_i : un trésor est placé dans le coffre d'indice i. Par hypothèse $P(A_i)=P(A_j)$ et puisque les événements A_i sont deux à deux incompatibles

$$P(A_i)=p/N$$

La question posée consiste à déterminer

$$P(A_N\mid \bar A_1\cap\ldots\cap\bar A_{N-1})$$

On a

$$P(\bar A_1\cap\ldots\cap\bar A_{N-1})=1-P(A_1\cup\ldots\cup A_{N-1})=1-\frac{N-1}{N}p$$

et

$$P(A_N\cap\bar A_1\cap\ldots\cap\bar A_{N-1})=P(A_N)=\frac{p}{N}$$

donc

$$P(A_N\mid\bar A_1\cap\ldots\cap\bar A_{N-1})=\frac{p}{N-(N-1)p}$$

Exercice 12 : [énoncé]
a) Dans l'urne d'indice k, la probabilité de tirer une boule blanche vaut k/N.
Dans cette même urne, la probabilité de tirer une succession de n boules blanches vaut $(k/N)^n$.
Par la formule des probabilités totales, la probabilité qu'après choix d'une urne, nous tirions une succession de n boules blanches vaut

$$\pi_n=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n$$

Notons A_k l'événement, la boule tirée lors du k-ième tirage est une boule blanche
La probabilité conditionnée cherchée vaut

$$P(A_{n+1}\mid A_1\cap\ldots\cap A_n)=\frac{P(A_1\cap\ldots\cap A_{n+1})}{P(A_1\cap\ldots\cap A_n)}$$

avec

$$P(A_1\cap\ldots\cap A_n)=\pi_n$$

donc

$$P(A_{n+1}\mid A_1\cap\ldots\cap A_n)=\frac{1}{N}\frac{\sum_{k=0}^{N}k^{n+1}}{\sum_{k=0}^{N}k^n}$$

b) Par somme de Riemann, on a

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n\xrightarrow[N\to+\infty]{}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}$$

En adaptant quelque peu l'expression, on obtient

$$\pi_n\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{1}{n+1}$$

donc

$$P(A_{n+1}\mid A_1\cap\ldots\cap A_n)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{n+1}{n+2}$$

Exercice 13 : [énoncé]
On a

$$P(A)=P(A\cap(B\cup\bar B))=P\left((A\cap B)\cup(A\cap\bar B)\right)$$

Les événements $A\cap B$ et $A\cap\bar B$ étant disjoints

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\bar B)$$

Or $P(A\cap B)=P(A\mid B)P(B)$ et $P(A\cap\bar B)=P(A\mid\bar B)P(\bar B)$.

Exercice 14 : [énoncé]
a) L'évènement contraire est que le tirage ne comporte que des boules blanches.
Par dénombrement, sa probabilité est

$$\binom{8}{3}\Big/\binom{10}{3}=\frac{7}{15}$$

et la probabilité cherchée est

$$1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

b) Notons A l'événement, la première boule tirée est noire. En raisonnant comme au dessus

$$p(A)=\frac{9\times8+9\times8}{10\times9\times8}=\frac{1}{5}$$

L'événement B, au moins une boule tirée est noire a été mesurée ci-dessus et donc

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)}{p(B)} = \frac{3}{8}$$

Exercice 15 : [énoncé]
Pour $i = 1, 2$, notons G_i l'évènement

« le i-ème enfant de la famille est un garçon »

On considère les évènements G_1 et G_2 indépendants et

$$p(G_1) = p(G_2) = 1/2$$

On étudie l'évènement $A = G_1 \cap G_2$.
a) $P(A) = P(G_1) \times P(G_2) = 1/4$.
b) $P(A \mid G_1) = \frac{P(G_1 \cap G_2)}{P(G_1)} = P(G_2) = \frac{1}{2}$.
c) $P(A \mid G_1 \cup G_2) = \frac{P(G_1 \cap G_2)}{P(G_1) + P(G_2) - P(G_1 \cap G_2)} = \frac{1}{3}$.
d) Notons D_i l'évènement

« le i-ème enfant de la famille est né le 29 février »

Les évènements G_1, G_2, D_1 et D_2 sont considérés mutuellement indépendants avec

$$P(D_1) = P(D_2) = \frac{1}{366 + 3 \times 365} = p$$

(en première approximation, on année bissextile a lieu tous les quatre ans)
On veut calculer

$$P\left(A \mid (G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cup D_2)\right)$$

On a

$$P\left((G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cup D_2)\right) = P\left(G_1 \cap D_1\right) + P\left(G_2 \cap D_2\right) - P\left(G_1 \cap D_1 \cap G_2 \cap D_2\right)$$

et donc

$$P\left((G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cup D_2)\right) = p - \frac{1}{4}p^2$$

Aussi

$$P\left(A \cap [(G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cup D_2)]\right) = P\left([A \cap D_1] \cup [A \cap D_2]\right)$$

et donc

$$P\left(A \cap [(G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cup D_2)]\right) = \frac{1}{2}p - \frac{1}{4}p^2$$

Finalement

$$P\left(A \mid (G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cup D_2)\right) = \frac{2-p}{4-p} \simeq 0,5$$

Exercice 16 : [énoncé]
a) Il y a $\binom{52}{5}$ distributions possibles équiprobables.

Il y a exactement $\binom{4}{2}$ paires d'As, $\binom{48}{3}$ façons de compléter ce jeu avec d'autres cartes que des As.
Au final, ce la donne la probabilité

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{2162}{54145} \simeq 0,04$$

b) La probabilité que le jeu distribué ne comporte pas d'As est

$$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$$

et par complément, celle que le jeu distribué comporte au moins un As est

$$1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$$

La probabilité conditionnelle cherchée est donc

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5} - \binom{48}{5}} = \frac{1081}{9236} \simeq 0,12$$

Exercice 17 : [énoncé]
On a

$$P(A \mid B \cap C)P(B \mid C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = P(A \cap B \mid C)$$

Exercice 18 : [énoncé]
Notons A_i l'événement la boule obtenue lors du i-ème tirage est noire.
On introduit un système complet d'événements en considérant $B_1, \ldots, B_4$ égaux à

$$A_1 \cap A_2,\ A_1 \cap \bar{A}_2,\ \bar{A}_1 \cap A_2 \text{ et } \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$$

Par la formule des probabilités totales

$$p(A_3) = \sum_{k=1}^{4} p(A_3 \mid B_k) p(B_k)$$

Il ne reste plus qu'à évaluer...

$$p(A_3 \mid B_1) = 0$$

$$p(A_3 \mid B_2) = p(A_3 \mid B_3) = 1/8 \text{ avec} p(B_2) = p(B_3) = 8/10 \times 2/9$$

et

$$p(A_3 \mid B_4) = 2/8 \text{ avec } p(B_4) = 8/10 \times 7/9$$

Au final

$$p(A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$$

C'est aussi la probabilité que la première boule tirée soit noire et par un argument de symétrie ce n'est pas si étonnant...

Exercice 19 : [énoncé]
Au premier tirage, la probabilité que la boule tirée soit blanche est

$$\frac{b}{b+r}$$

Au deuxième tirage, il faut tenir compte du résultat du précédent tirage. La probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche sachant que la première l'était est $(b+d)/(b+r+d)$. Si la première était rouge, on obtient $b/(b+r+d)$. Par la formule des probabilités totales, la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage est

$$\frac{b+d}{b+r+d} \times \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+d} \times \frac{r}{b+r} = \frac{b}{b+r}$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons que la probabilité que la boule soit blanche lors du n-ième tirage vaut toujours $b/(b+r)$. Supposons cette propriété acquise jusqu'au rang n et étudions le résultat du $n+1$-ième tirage selon le nombre k de boules blanches tirées lors des précédents tirages. Par hypothèse de récurrence, le nombre k suit une loi binomiale de taille n et de paramètre $p = b/(b+r)$. La probabilité de tirer une boule blanche au $n+1$-ième tirage sachant que k boules blanches ont déjà été tirées vaut

$$\frac{b+dk}{b+r+nd}$$

Par la formule des probabilités totales, la probabilité d'obtenir une boule blanche au $n+1$-ième tirage vaut

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{b+dk}{b+r+nd} \left(\frac{b}{b+r}\right)^k \left(\frac{r}{b+r}\right)^{n-k}$$

On sépare la somme en deux et l'on exploite

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

pour obtenir

$$\frac{1}{b+r+nd}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b \left(\frac{b}{b+r}\right)^k \left(\frac{r}{b+r}\right)^{n-k} + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{bnd}{b+r}\left(\frac{b}{b+r}\right)^j\left(\frac{r}{b+r}\right)^{n-}$$

et l'on conclut à l'aide de la formule du binôme.

Exercice 20 : [énoncé]
On a $p_1 = 1$ et $p_2 = p$.
Supposons connu p_n. Selon que A_n émet la même information que A_1 ou non, on a par la formule des probabilités totales

$$p_{n+1} = pp_n + (1-p)(1-p_n)$$

La suite (p_n) vérifie donc la relation de récurrence

$$p_{n+1} = (2p-1)p_n + 1 - p$$

Sachant la condition initiale $p_1 = 1$, cette suite arithmético-géométrique à pour terme général

$$p_n = \frac{1 + (2p-1)^{n-1}}{2}$$

Si $p \in]0,1[$ alors $|2p-1| < 1$ et donc $p_n \to 1/2$.

Exercice 21 : [énoncé]
$P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ et $P(A \cap B) = P(\{6\}) = 1/6$ donc

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Les évènements A et B sont bien indépendants.

Exercice 22 : [énoncé]
Puisque A est la réunion disjointe de $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$, on a

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

et donc

$$P(A) = P(A)P(B) + P(A \cap \bar{B})$$

puis

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$$

Les évènements A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Exercice 23 : [énoncé]
Si A et indépendant de tout évènement alors A est indépendant de lui-même et donc

$$P(A) = P(A \cap A) = P(A)^2$$

On en déduit $P(A) = 0$ ou 1.
Inversement, supposons $P(A) = 0$. Pour tout évènement B, on a $A \cap B \subset A$ et donc $P(A \cap B) \leqslant P(A) = 0$. Ainsi

$$P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$$

Supposons maintenant $P(A) = 1$. On a $P(\bar{A}) = 0$ et donc $\bar{A}$ est indépendant de tout évènement B. Par suite, A est aussi indépendant de tout évènement B.

Exercice 24 : [énoncé]
Si A et B sont indépendants alors

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

donc $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$.
La réciproque est immédiate.

Exercice 25 : [énoncé]
Considérons le tirage équilibré d'un dé à six faces et considérons

$$A = \{2, 4, 6\},\ B = \{1, 2\} \text{ et } C = \{2, 3\}$$

On vérifie aisément

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ et } P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

Cependant

$$P(A \cap (B \cup C)) = 1/6 \neq P(A)P(B \cup C) = 1/4$$

et

$$P(A \cap (B \cap C)) = 1/6 \neq P(A)P(B \cap C) = 1/12$$

Ainsi, A et $B \cup C$ ne sont pas indépendants. Non plus, A et $B \cap C$.

Exercice 26 : [énoncé]
Considérons le tirage équilibré d'un dé à six faces et considérons

$$A = \{2, 4, 6\},\ B = \{1, 2, 3\} \text{ et } C = \{1, 2, 4\}$$

On vérifie aisément

$$P(A \cap (B \cup C)) = 1/3 = P(A)P(B \cup C) \text{ et } P(A \cap (B \cap C)) = 1/6 = P(A)P(B \cap C)$$

Cependant

$$P(A \cap B) = 1/6 \neq P(A)P(B) = 1/4$$

Exercice 27 : [énoncé]
On a

$$P(A)P(B \cup C) = P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

et donc

$$P(A)P(B \cup C) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

Or

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \cap C)$$

et

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

donc

$$P(A)P(B) + P(A)P(C) = P(A \cap B) + P(A \cap C)$$

Si $P(A)P(B) > P(A\cap B)$ alors $P(A)P(C) < P(A\cap C)$. Or B étant indépendant de $A\cap C$ et C de $A\cap B$, on obtient

$$P(B)P(A\cap C) = P(A\cap B\cap C) = P(C)P(A\cap B)$$

ce qui fournit

$$P(A)P(B)P(C) < P(A\cap B\cap C) < P(A)P(B)P(C)$$

C'est absurde. De même $P(A)P(B) < P(A\cap B)$ est absurde et donc

$$P(A)P(B) = P(A\cap B)$$

puis

$$P(A)P(C) = P(A\cap C)$$

Aussi

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

et enfin, puisque A et $B\cap C$ sont indépendants

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B\cap C)$$

ce qui donne

$$P(B)P(C) = P(B\cap C)$$

Exercice 28 : [énoncé]

a) Les multiples de p dans $\{1,\dots,n\}$ sont $p, 2p, \dots, n$. Il y en n/p et donc

$$P(A_p) = \frac{1}{p}$$

b) Puisque p et q sont premiers entre eux, on a

$$pq \mid k \Leftrightarrow p \mid k \text{ et } q \mid k$$

On en déduit $A_p \cap A_q = A_{pq}$ et puisque

$$p(A_{pq}) = \frac{1}{pq} p(A_p)p(A_q)$$

on peut qualifier les évènements A_p et A_q d'indépendants.
On généralise par un calcul analogue à l'indépendance de $A_{p_1},\dots,A_{p_r}$ car

$$A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_k}} = A_{p_{i_1}\dots p_{i_k}}$$

pour toute suite finie $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant r$.
c) Notons $p_1,\dots,p_r$ les diviseurs premiers de n. Les entiers k et n sont premiers entre eux si, et seulement si, ils n'ont pas de diviseurs premiers en communs. Ainsi

$$B = \bar{A}_{p_1} \cap \dots \cap \bar{A}_{p_r}$$

Les événements $\bar{A}_{p_1},\dots,\bar{A}_{p_r}$ étant indépendants (car leurs contraires le sont)

$$P(B) = \prod_{k=1}^{r} P(\bar{A}_{p_k}) = \prod_{k=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Ce résultat est une façon « originale »d'obtenir la valeur de la fonction indicatrice d'Euler.

Exercice 29 : [énoncé]

On étudie

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right)$$

Par indépendances des $\overline{A_i}$, on a

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left[1 - P(A_i)\right]$$

Or $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-P(A_i)} = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right)$$

Exercice 30 : [énoncé]

Notons Ω la population, M le sous-ensemble constitué des individus malades et T celui constitué des individus rendant le test positif. On a

$$P(M) = 10^{-4},\ P(T \mid M) = 0,99 \text{ et } P(T \mid \bar{M}) = 10^{-3}$$

Par la formule des probabilités totales

$$P(T) = P(T\mid M)P(M) + P(T\mid \bar{M})P(\bar{M})$$

puis par la formule de Bayes

$$P(M\mid T) = \frac{P(M\cap T)}{P(T)} = \frac{P(T\mid M)P(M)}{P(T)}$$

ce qui numériquement donne 9 %.
La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif ! Cela s'explique aisément car la population de malade est de 1/10 000 et celle des personnes saines faussement positives est de l'ordre de 1/1 000.

Exercice 31 : [énoncé]
a) Notons D l'évènement le dé tiré est équilibré et A l'évènement : on a obtenu un « six »

$$P(D) = P(\bar{D}) = 1/2,\ P(A \mid D) = 1/6 \text{ et } P(A \mid \bar{D}) = 1/2$$

Par la formule de Bayes

$$P(D \mid A) = \frac{P(A \mid D)P(D)}{P(A)}$$

avec par la formule des probabilités totales

$$P(A) = P(A \mid D)P(D) + P(A \mid \bar{D})P(\bar{D})$$

On obtient

$$P(D \mid A) = \frac{1}{4}$$

b) Notons B l'évènement : on a obtenu un « cinq »Par des calculs analogues aux précédents

$$P(D \mid B) = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10}} = \frac{5}{8}$$